

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
АЛЬ-ФАРАБИ

А.А. Темирбаев

СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ

Сборник лекции для студентов и магистрантов
специальности «Радиотехника, электроника и телекоммуникации»

Алматы, 2024

Аннотация

Коллективная динамика в больших ансамблях или сетях связанных осцилляторов или автоколебательных элементов является одной из основных проблем в нелинейной динамике. Она важна как для теоретического понимания сложных процессов, так и для широкого спектра приложений в различных областях. В данном сборнике лекции изложены теоретические основы синхронизации и экспериментальные результаты автора по исследованию синхронизации в электронных ансамблях с глобальной и нелинейной связью.

Сборник лекции предназначен для студентов, желающих ознакомиться с физическим феноменом – синхронизация.

© Темирбаев А. А., 2024

Лекция 6. Основные модели. Хаотические осцилляторы.

Цель лекции: Изучить хаотические осцилляторы Лоренца и Рёсслера, как базовых моделей, помогающих исследователям увидеть и понять закономерности хаоса, его влияния на реальные системы и методы контроля его проявлений. Изучить хаотическую синхронизацию и рассмотреть возможности применения явления хаотической синхронизации в задачах по защите информации.

1. Осциллятор Рёсслера

Известная хаотическая автоколебательная система – осциллятор Рёсслера описывается следующей системой:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y - z, \\ \dot{y} &= \omega x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c),\end{aligned}\tag{1}$$

где a, b, c, ω – положительные параметры. Рассмотрим поведение системы (1) при $b=0.1$ и $c=8.5$. Параметр a , который берется в интервале $[0.15; 0.3]$, определяет форму хаотического аттрактора в системе. Для a в этом интервале имеют место два существенно различных хаотических аттрактора:

➤ При a меньше некоторого критического значения a_{cr} ($a_{cr} \approx 0.186$ при $\omega = 0.98$), изображающая точка на проекции хаотической траектории на плоскость (x, y) всегда вращается вокруг точки – проекции состояния равновесия $(x_0, y_0) \approx (0, 0)$ (рис.1(a)). В этом случае угол вращения:

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}\tag{2}$$

определяет фазу колебаний, которая растет практически линейно (равномерно). Соответствующий аттрактор системы называют *фазо-когерентным*. Для такого аттрактора определение фазы есть простое обобщение традиционного определения фазы для предельного цикла.

➤ При параметре a , большим критического значения a_{cr} , проекция фазовой траектории на плоскость (x, y) уже не всегда охватывает точку (x_0, y_0) (рис.1(b)), и простое определение фазы уже не применимо.

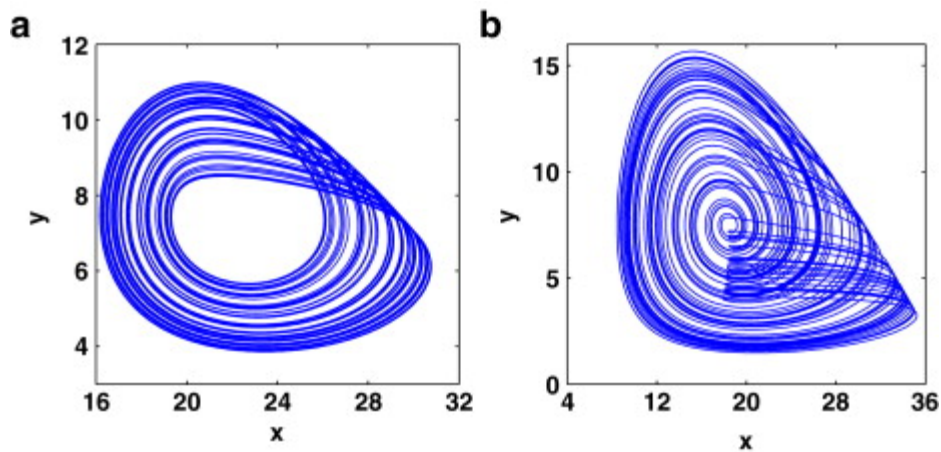


Рис.1. Проекция аттракторов системы Ресслера на плоскость (x, y) ; параметры: $\omega = 0.98$, $b = 0.1$, $c = 8.5$ и $a = 0.16$ (a), $a = 0.28$ (b)

Аттрактор в данном случае не фазо-когерентный. Его называют *аттрактор-воронка*. С ростом a количество не охватывающих точку $(0,0)$ петель увеличивается.

Задание:

1. Воспользовавшись описанным выше способом введения фазы, построить зависимость фазы колебаний в системе Ресслера от времени при фиксированных значениях параметров a, b, c, ω .

2. Осциллятор Лоренца

Система Лоренца:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= (r - z)x - y, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \quad (3)$$

демонстрирует два основных типа хаотического поведения. Наиболее известный тип – это “классический” аттрактор Лоренца. На рис.2(a) дана проекция аттрактора при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 28$ на плоскость (x, y) . Как видно из рисунка задача определения фазы здесь не такая простая как в системе Ресслера с фазо-когерентным аттрактором. Это связано с тем, что проекция аттрактора на плоскости (x, y) , (x, z) и (y, z) не являются кривыми, обязательно охватывающими некоторую фиксированную точку. Это сложность может быть преодолена, если рассмотреть проекции аттрактора на плоскость $(u = \sqrt{x^2 + y^2}, z)$ (рис.2(b)). Это позволяет ввести фазу колебаний следующим образом:

$$\phi = \arctan \frac{z - z_0}{u - u_0}, \quad (4)$$

где $u_0 = 12$ и $z_0 = 27$, и тогда характерная частота определяется как

$$\Omega = \langle \dot{\phi} \rangle_\tau \quad (5)$$

На рис.3. показаны реализации колебаний системы Лоренца.

Второе типичное поведение в системе Лоренца – хаотический аттрактор с перемежаемостью I-го типа. Он имеет место при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 166.1$ (рис.4.). Такое движение также имеет характерный временной масштаб. Для перемежаемости I-го типа очень длительная ламинарная стадия продолжительности τ сменяется очень короткой турбулентной стадией продолжительности T , и затем вновь начинается следующая ламинарная стадия.

Задание:

1. В среде MultiSim собрать электронную схему показанную на рис.5 и исследовать хаотическую динамику системы Лоренца. Напряжения на выходах операционных усилителей обозначенные как x , y , и z соответствуют безразмерным переменным системы Лоренца (5). В качестве умножителей можно использовать AD633, а в качестве операционных усилителей TL082. Параметры системы Лоренца R , σ , и b можно контролировать с помощью трех резисторов:

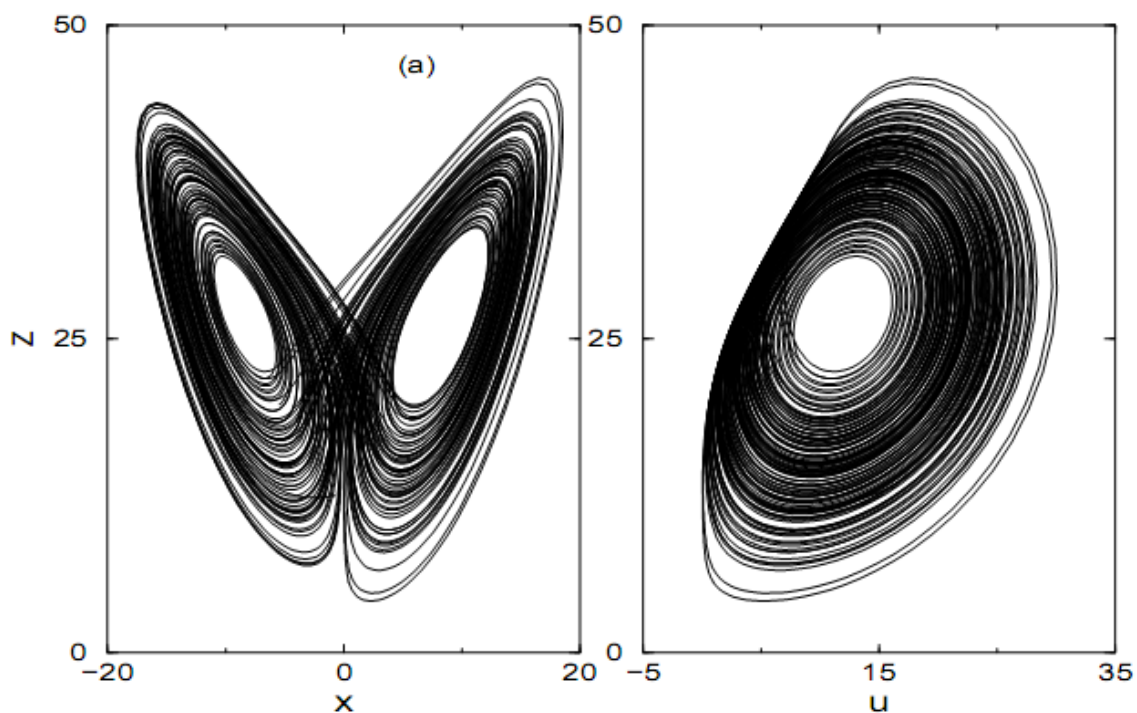


Рис.2. Проекция “классического” аттрактора в системе Лоренца на плоскости (x, z) и $(u = \sqrt{x^2 + y^2}, z)$. Параметры: $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 28$

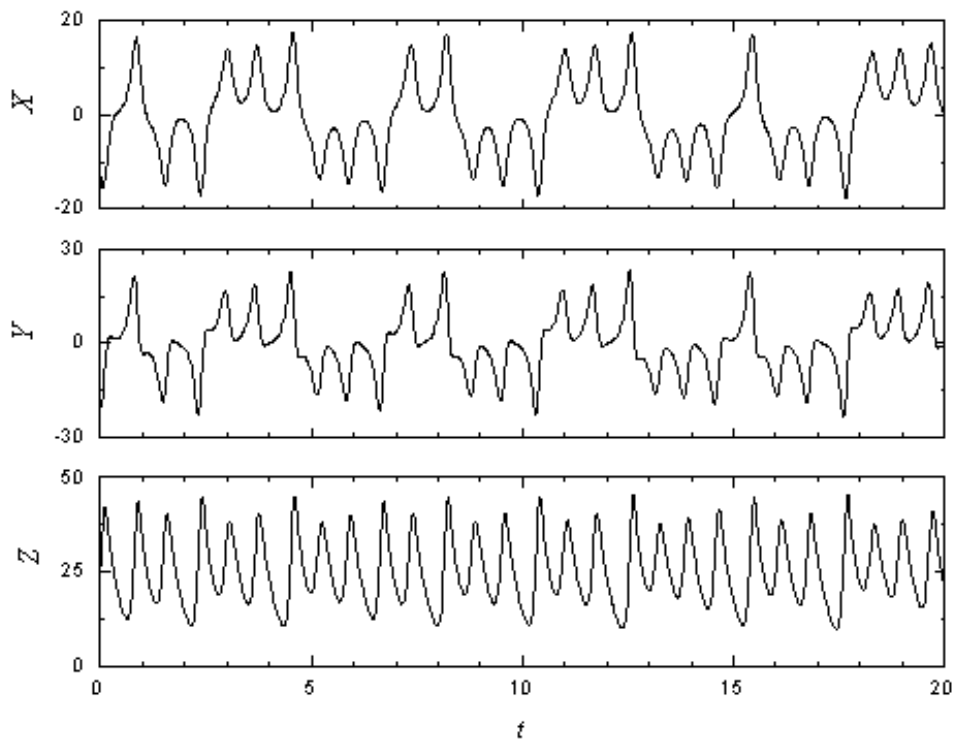


Рис.3. Временные реализации переменных системы Лоренца при тех же параметрах, как на рис.5.

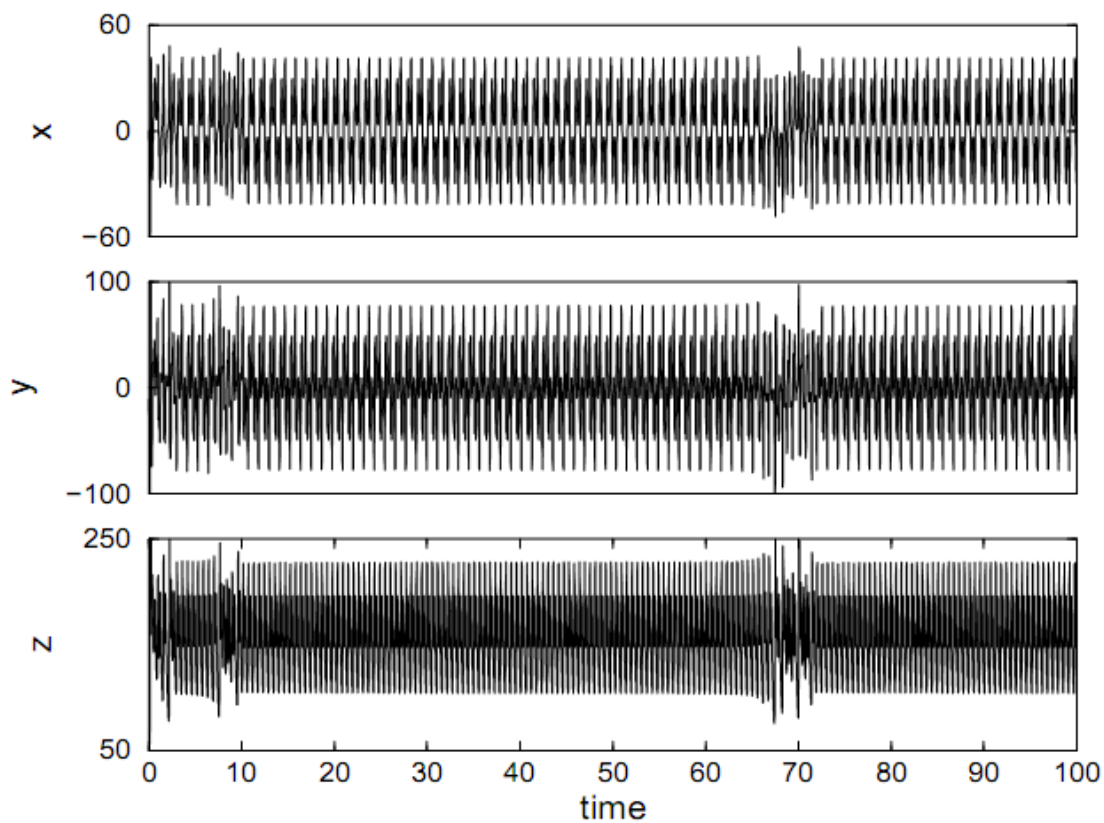


Рис.4. Хаотические колебания с перемежаемостью в системе Лоренца. Параметры: $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 166.1$

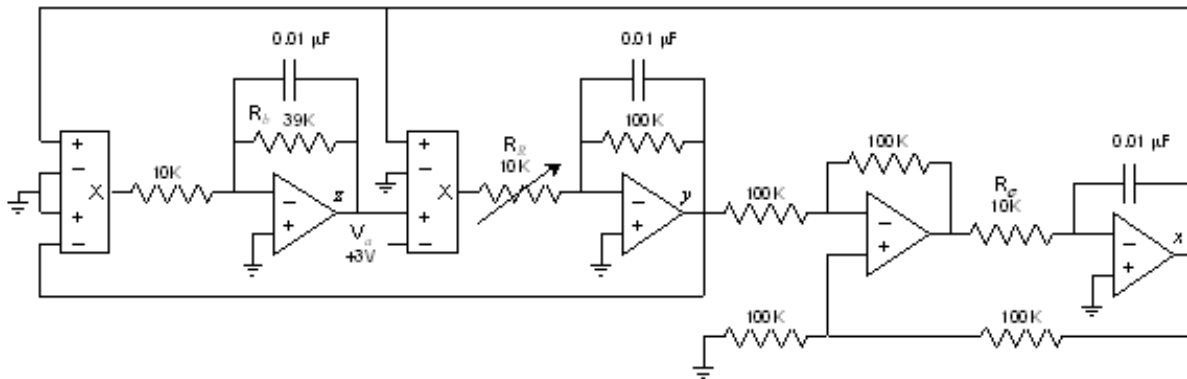


Рис.5. Электронная схема системы Лоренца

$$R = \frac{10 \text{ k}\Omega}{a R_R} \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{100 \text{ k}\Omega}{R_\sigma} \quad (9)$$

$$b = \frac{100 \text{ k}\Omega}{R_b} \quad (10)$$

Безразмерный параметр a регулируется напряжением V_a в соответствии с выражением:

$$a = \frac{1 \text{ volt}}{V_a} \quad (11)$$

где, величина V_a измеряется в вольтах.

3. Заключение

Изучение хаотических моделей, таких как осцилляторы Лоренца и Рёсслера, имеет большое значение для понимания сложных и непредсказуемых процессов, которые часто встречаются в природе, технике и социальных системах. Эти осцилляторы служат примерами динамических систем, демонстрирующих хаос — режим движения, при котором система становится чрезвычайно чувствительной к начальному состоянию, так что небольшие изменения в начальных условиях приводят к совершенно разным результатам. Понимание хаотических моделей позволяет более глубоко исследовать природу хаоса и его свойства, что имеет важное значение в ряде областей.

Список использованных источников

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J., Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.-508p.

2. Rosenblum M., Pikovsky A., Self-organized quasiperiodicity in oscillator ensemble with global nonlinear coupling //Phys. Rev. Lett.- 2007.-Vol. 98, №6.- P.064101(4).
3. Греченко Т.Н., Психофизиология: учебное пособие. – М.: Гайдарики, 1999. – 358 с.
4. Aschoff J., Daan S., Groos G.A., Vertebrate Circadian Systems. Structure and Physiology.- Berlin: Springer,1982.-250p.
5. Moore R.Y., A clock for the ages //Science.- 1999.-Vol. 284.-P.2102-2103.
6. Golomb D., Hansel D., Mato G., Mechanisms of synchrony of neural activity in large networks in Neuroinformatics and Neural Modeling, ser. Handbook of Biological Physics, F. Moss and S. Gielen, Eds. Amsterdam: Elsevier, 2001.- Vol. 4, pp. 887–968.
7. Ott E., Chaos in Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2nd edition, 2002.
8. Kuramoto Y., Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.